<u>Bataille Navale. Éléments de correction</u>

Partie A

1. **a)** 6 positions différentes. Il peut occuper une ligne (3 possibilités) ou une colonne (3 possibilités).

b) Plusieurs possibilités. Par exemple :

	×	
		×
×		

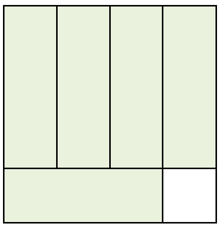
×		
	×	
		×

ou

c) Avec deux tirs on ne touche qu'une ou deux lignes (resp. colonnes). Un bateau placé sur une des lignes (resp colonnes) non touchées n'est pas atteint. On ne peut donc pas réaliser de jeu optimal avec deux tirs.

d) D'après c) $(3) > 2$. D'après b) : $J(3) \leq 3$. Donc $J(3) = 3$.

2. **a)**



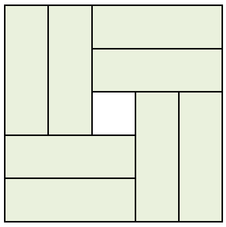
Il faut au moins 5 tirs pour toucher à coup sûr chacune de ces positions possibles du bateau. Donc $J(4) \geq 5$.

b) Par exemple :

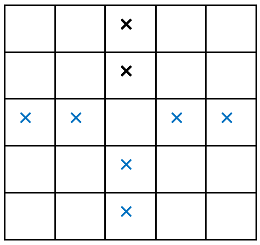
	×		
		×	
×			×
	×		

Que le bateau soit sur une ligne (2 positions possibles par ligne) ou sur une colonne (2 positions possibles par colonne) il est touché par un des tirs représentés par des x ci-contre. Et on ne peut pas réaliser cela avec moins de 5 tirs cf a). Donc le jeu représenté est un jeu optimal et $J(4) = 5$

3. On peut placer le bateau sur l'une des huit positions deux à deux disjointes grisées ci- contre.
Un jeu optimal doit permettre de toucher le bateau dans toutes ces positions (et dans d'autres). Il faut au moins huit tirs, un au moins par zone grisée. Donc $J(5) \geq 8$



Que le bateau soit sur une ligne (3 positions possibles par ligne) ou sur une colonne (3 positions possibles par colonne) il est touché par un des tirs représentés par des x ci- contre.
Le jeu visualisé ci-contre permet donc à coup sûr de toucher le bateau, où qu'il soit.
Ce jeu comporte 8 tirs. Donc $J(5) \leq 8$.

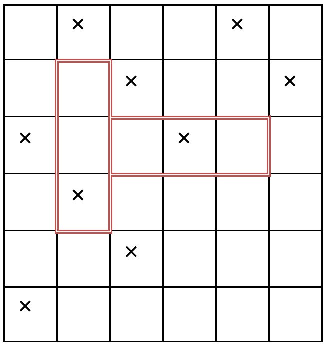


$J(5) \geq 8$ et $J(5) \leq 8$ donc : $J(5) = 8$

Partie B

1. Cas $n = 3p$

a) On peut identifier sur chaque ligne (ou colonne) p blocs successifs de trois cases. Ceci sur $3p$ lignes (ou colonnes). Cela permet de recouvrir complètement le damier à l'aide de $3p^2$ blocs deux à deux disjoints de trois cases alignées. Il faut donc au moins $3p^2$ tirs pour espérer toucher le bateau, où qu'il se trouve.
Donc $J(3p) \geq 3p^2$.



b) et c) On considère le damier $n \times n$ comme une juxtaposition de p^2 damiers 3×3 cases. On place dans chacun de ces damiers les croix de la même façon, comme en A-1-b). On vérifie que sur chaque ligne les croix successives sont espacées de deux cases. Ce qui ne laisse pas de place à trois cases consécutives non atteintes par un tir. De même sur les colonnes

Ce jeu permet donc de toucher le bateau où qu'il soit. Et il est composé de $3p^2$ tirs. D'après a), il n'existe pas de jeu comportant moins de tirs et permettant de toucher le bateau où qu'il soit. Donc ce jeu est optimal et $J(3p) = 3p^2$

2. Cas $n = 3p + 1$

a) Pour obtenir le damier ($3p$+1)×($3p$+1) on complète le damier $3p$×$3p$ par une ligne de $3p$+1 cases en bas et une colonne de $3p$ cases à droite. A partir des $3p^2$ blocs successifs de trois cases déjà obtenus sur le damier $3p$×$3p$, on peut ajouter p blocs successifs de trois cases en position horizontale en bas et p blocs successifs de trois cases en position verticale à droite. Il reste une case non recouverte dans le coin. On obtient ainsi $3p^2$+$2p$ blocs successifs de trois cases deux à deux disjoints.

Donc $J(3p + 1) \geq 3p^2 + 2p$.

b) et c) Reprenant la grille du jeu optimal pour le cas n=$3p$, on complète par des croix comme dans A-2-b), sur la ligne rajoutée en bas et sur la colonne rajoutée à droite. On rajoute ainsi $2p$ croix aux $3p^2$ croix déjà placées. D'où un jeu de $3p^2 + 2p$. tirs qui permet de toucher à coup sûr le bateau. Il est optimal d'après a) et $J(3p + 1) = 3p^2 + 2p$

3.

a) Plusieurs démarches possibles. Par exemple :

dans tous les cas, $J(n)$ est un entier (par sa définition même).

<u>Si $n = 3p$</u> : $J(n) = 3p^2$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2$.

Donc , $J(n)$, qui est égal à $\frac{n^2}{3}$, est a fortiori inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$ et l'entier suivant, $J(n) + 1$est strictement supérieur à $\frac{n^2}{3}$. Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

<u>**Si $n = 3p + 1$**</u> : $J(n) = 3p^2 + 2p$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 2p + \frac{1}{3}$. Donc , $J(n) < \frac{n^2}{3}$

Et $(n) + 1 = 3p^2 + 2p + 1$. Donc : $\frac{n^2}{3} < J(n) + 1$.

Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

<u>**Si $n = 3p + 2$**</u> : $J(n) = 3p^2 + 4p + 1$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 4p + \frac{4}{3} = 3p^2 + 4p + 1 + \frac{1}{3}$. Donc , $J(n) < \frac{n^2}{3}$

Et $(n) + 1 = 3p^2 + 4p + 2$. Donc : $\frac{n^2}{3} < J(n) + 1$.

Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

b) La réponse est non : En effet , $\frac{77^2}{3} < 1977 \quad 2028 = \frac{78^2}{3}$ donc $J(n) < 2020$ si $n \leq 77$ et $J(n) > 2020$ si $n \geq 78$.